

Plan du cours

- 1 Calcul différentiel
- 2 Théorie générale des ED : $x'(t) = f(x(t))$
- 3 **Cas linéaire autonome** : $x'(t) = Ax(t)$
- 4 Linéarisation & ED linéaires non autonomes :
 $\delta x' = Df(x(t)) \cdot \delta x$ & $x'(t) = A(t)x(t)$
- 5 Équilibres et stabilité,
 $x' = f(x)$ vs $\delta x' = Df(x_0) \cdot \delta x$
- 6 Introduction à l'automatique :
 $x'(t) = f(x(t), u(t))$

1 / 16

Plan de la séance

- 1 Introduction
- 2 Exponentielle de matrices
- 3 Réduction de Jordan
- 4 Forme générale des solutions de $x'(t) = Ax(t)$

2 / 16

ED linéaires autonomes

- ED autonome générale : $x' = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
 - **Cas linéaire** : $f(x) = Ax$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$ [ou \mathbb{C}^n]
 \Rightarrow $x'(t) = Ax(t)$
- où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ [ou $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$]

Exemple ($n = 1$)

$$y'(t) = \alpha y(t), \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ y(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Solution : } y(t) = e^{\alpha(t-t_0)} y(t_0).$$

3 / 16

2. Exponentielle de matrices

Déf. $\exp : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_n(\mathbb{R})$

- $f(t) = e^{tA}$ dérivable, $f'(t) = e^{tA}A = Ae^{tA} = Af(t)$.
- Si P inversible, $Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$

Théorème

L'unique solution de $x'(t) = Ax(t)$ t.q. $x(t_0) = x_0$ est

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \phi_t = e^{tA} \quad \text{et} \quad \text{ED complète.}$$

\rightarrow il suffit de savoir calculer e^{tA} ! ... et en fait $e^{tPAP^{-1}}$ suffit

4 / 16

- Principe : quand A est diagonalisable, c-a-d,

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

alors
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comment faire dans le cas général ?

Plan de la séance

- 1 Introduction
- 2 Exponentielle de matrices
- 3 Réduction de Jordan
- 4 Forme générale des solutions de $x'(t) = Ax(t)$

- **Polynôme caractéristique** : $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$,

Dans \mathbb{C} ,
$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$$

où
$$\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} & \text{valeurs propres distinctes de } A; \\ p_1 + \dots + p_r = n \end{cases}$$

- **Sous-espaces propres** : $\Pi_j = \Pi_{\lambda_j} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_j I)$,

$$\dim \Pi_j \leq p_j$$

- **Sous-espaces caractéristiques** : $\Gamma_j = \Gamma_{\lambda_j} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_j I)^{p_j}$

$$\rightarrow \Pi_j \subset \Gamma_j \quad \text{et} \quad \Gamma_j \text{ invariant par } A$$

Rappel : $A \in M_n(\mathbb{C})$ **diagonalisable** (dans \mathbb{C})

si \exists une base de \mathbb{C}^n formée de vecteurs propres de A

Théorème de décomposition des noyaux

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r$$

$$\Rightarrow \dim \Gamma_j = p_j, \text{ et}$$

$$A|_{\Gamma_j} = \lambda_j I|_{\Gamma_j} + N_j, \quad \text{avec } N_j^{p_j} = 0.$$

$A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable dans \mathbb{C}

$$\Leftrightarrow \mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_r$$

$$\Leftrightarrow \dim \Pi_j = p_j \quad \forall j$$

$$\Leftrightarrow \Pi_j = \Gamma_j \quad \forall j$$

$$\Leftrightarrow N_j = 0 \quad \forall j$$

Théorème de Jordan

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $J_j = \lambda_j I + N_j$ matrice $(p_j \times p_j)$.

Application au calcul de l'exponentielle

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{avec } e^{tJ_j} = e^{t\lambda_j} \left(I + tN_j + \dots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} N_j^{m_j-1} \right).$$

où $m_j =$ plus petit m tel que $N_j^m = 0$.

N.B. $m_j = 1 \Leftrightarrow \Pi_j = \Gamma_j \Leftrightarrow N_j = 0 \Leftrightarrow A|_{\Gamma_j} \text{ diag}^{\text{ble}}$

9 / 16

Plan de la séance

- 1 Introduction
- 2 Exponentielle de matrices
- 3 Réduction de Jordan
- 4 Forme générale des solutions de $x'(t) = Ax(t)$

10 / 16

Forme des solutions dans \mathbb{C}^n

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ dans \mathbb{C}^n s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^r e^{t\lambda_j} \left(\sum_{k=0}^{m_j-1} t^k v_{j,k} \right), \quad \text{avec } v_{j,k} \in \Gamma_j.$$

En fait, dans la décomposition

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r,$$

si $x(0) = v_{1,0} + \dots + v_{r,0}$, alors

$$x(t) = e^{t\lambda_1} \left(\sum_k \frac{t^k}{k!} N_1^k \right) v_{1,0} + \dots + e^{t\lambda_r} \left(\sum_k \frac{t^k}{k!} N_r^k \right) v_{r,0}$$

11 / 16

Forme des solutions dans \mathbb{R}^n

$$\text{Si } A \in M_n(\mathbb{R}), \quad P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^s (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \prod_{j=s+1}^q [(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)]^{p_j}$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Toute solution de $x'(t) = Ax(t)$ dans \mathbb{R}^n s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^q e^{\alpha_j t} \left(\sum_{k=0}^{m_j-1} t^k [\cos(\beta_j t) a_{j,k} + \sin(\beta_j t) b_{j,k}] \right),$$

où $\alpha_j = \Re(\lambda_j)$, $\beta_j = \Im(\lambda_j)$, et $a_{j,k}, b_{j,k} \in E_j$.

Sous-espaces réels :

$$\begin{cases} E_j = \Gamma_{\lambda_j} \cap \mathbb{R}^n, & 1 \leq j \leq s \\ E_j = (\Gamma_{\lambda_j} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_j}) \cap \mathbb{R}^n, & s+1 \leq j \leq q. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$$

12 / 16

En fait, dans la décomposition $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$,

$$x(t) = x_1(t) + \dots + x_q(t) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} x_j(t) = e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{m_j-1} t^k a_{j,k}, & 1 \leq j \leq s \\ x_j(t) = e^{\alpha_j t} \sum_{k=0}^{m_j-1} t^k [\cos(\beta_j t) a_{j,k} + \sin(\beta_j t) b_{j,k}], & s+1 \leq j \leq q. \end{cases}$$

Comportement asymptotique

- si $\Re(\lambda_j) > 0$, $\|x_j(t)\| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow +\infty$;
- si $\Re(\lambda_j) < 0$, $x_j(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$;
- si $\Re(\lambda_j) = 0$, deux possibilités :
 - $m_j = 1$: $x_j(t)$ borné sur \mathbb{R} (périodique);
 - $m_j > 1$: $\|x_j(t)\| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \pm\infty$

13 / 16

Déf.

$$E^s = \left[\bigoplus_{\Re \lambda_j < 0} \Gamma_j \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re \lambda_j < 0} E_j \quad \text{esp. stable,}$$

$$E^u = \left[\bigoplus_{\Re \lambda_j > 0} \Gamma_j \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re \lambda_j > 0} E_j \quad \text{esp. instable,}$$

$$E^c = \left[\bigoplus_{\Re \lambda_j = 0} \Gamma_j \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re \lambda_j = 0} E_j \quad \text{esp. indifférent}$$

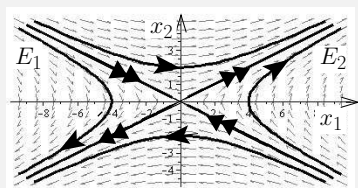
$$\Rightarrow \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Théorème (Caractérisation dynamique de E^s, E^u, E^c)

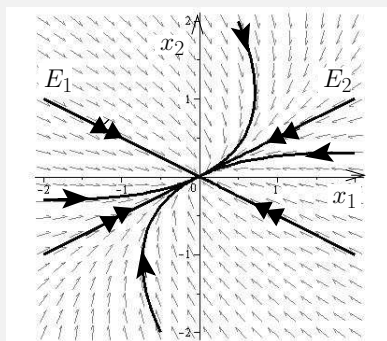
- $E^s = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \}$
- $E^u = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0 \}$
- $E^c = \{ x(0) \in \mathbb{R}^n : \exists C > 0 \text{ t.q., pour } |t| \text{ grand,}$
 $C^{-1} \|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq C |t|^n \|x(0)\| \}$

14 / 16

Exemple : $A \in M_2(\mathbb{R})$, valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles



CAS $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
 $\Rightarrow E^s = E_1$ et $E^u = E_2$



CAS $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
 $\Rightarrow E^s = \mathbb{R}^2$

15 / 16

Conclusions

Pour $x' = Ax$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Toutes les solutions $\rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

\Leftrightarrow

toutes les valeurs propres de partie réelle < 0

Au moins une valeur propre de partie réelle > 0

\Rightarrow des solutions divergent

16 / 16